Algèbre : à savoir avant la 3ème

1) **Les différents types de nombres**
2) **Les priorités opératoires**
3) **Les règles de calcul**
4) **Les critères de divisibilité**

1) Les différents types de nombres

- Les **nombres décimaux** sont les nombres qui peuvent s'écrire sous forme décimale, c'est-à-dire à l'aide d'une virgule.

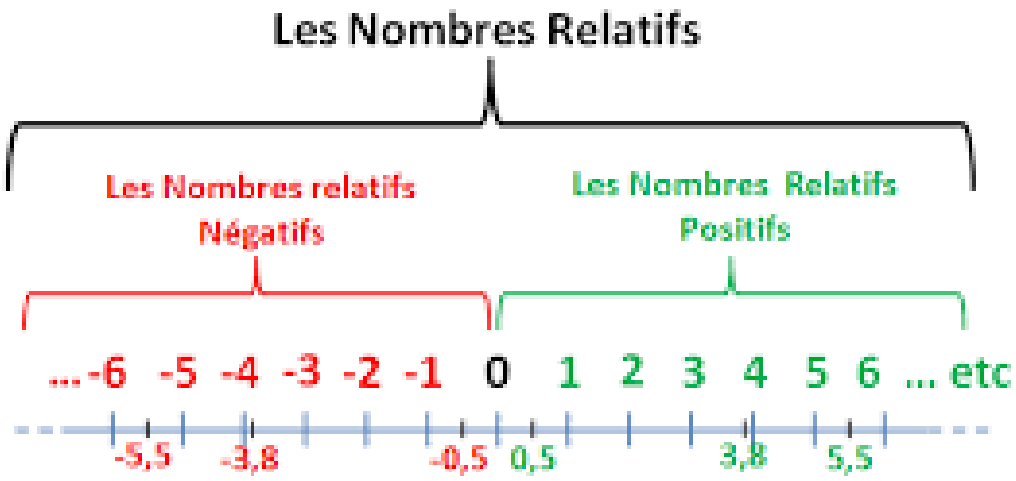
Par exemple 0,7 ou 534,26

- Les nombres décimaux incluent les nombres entiers, qui peuvent s'écrire sous forme décimale.

Par exemple 5 peut s'écrire 5,0 ou 5,00000

- On parle de **nombres relatifs** si l'on inclut des nombres strictement inférieurs à 0. Les nombres relatifs incluent les nombres **positifs** (ou naturels) et les nombres **négatifs.**

Par exemple -0,7 ou -534,26 ou -5



- Il existe des nombres qui ne peuvent s'écrire sous forme décimale mais qui peuvent s'écrire sous forme de fraction, on les appelle **nombres rationnels**.

Par exemple $\frac{1}{3}$ ne peut s'écrire sous forme décimale, on ne peut en donner qu'une valeur approchée : $\frac{1}{3}$ n'est pas égal à 0,333 car le nombre de chiffres après la virgule est infini.

- En revanche tous les nombres entiers et décimaux sont des **nombres rationnels**.

On peut écrire 5= $\frac{5}{1}$ donc 5 est un nombre rationnel, de la même façon: $\frac{-7}{10} = -0{,}7$

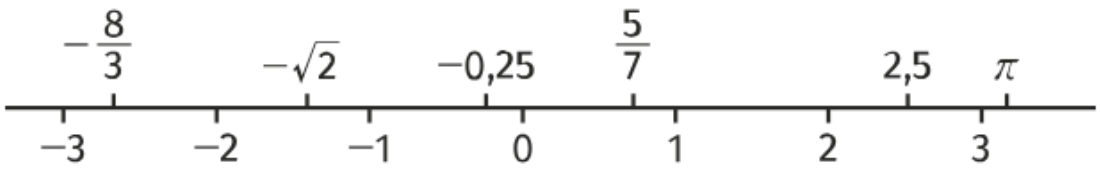
et $\frac{53426}{100} = -534{,}26$

- Il existe aussi des nombres qui ne peuvent s'écrire sous forme fractionnaire on les appelle **nombres irrationnels**.

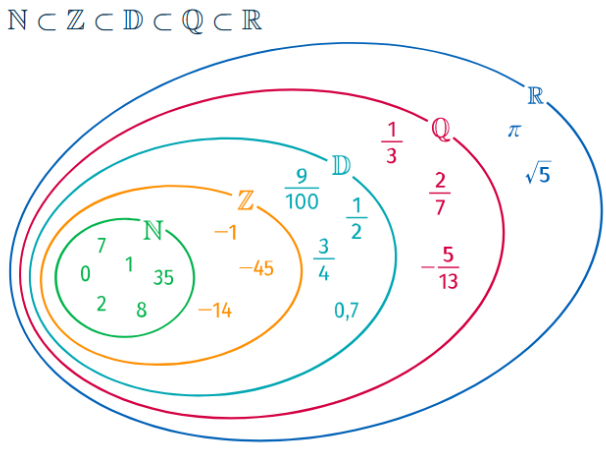
Par exemple π ou $\sqrt{2}$

Cette classification des nombres permet de savoir comment les écrire mais également comment les utiliser (dans des calculs).

Ils représentent des grandeurs qu'on peut représenter sur une droite graduée



Pour mémoriser les types de nombres, on peut utiliser le schéma ci-dessous :



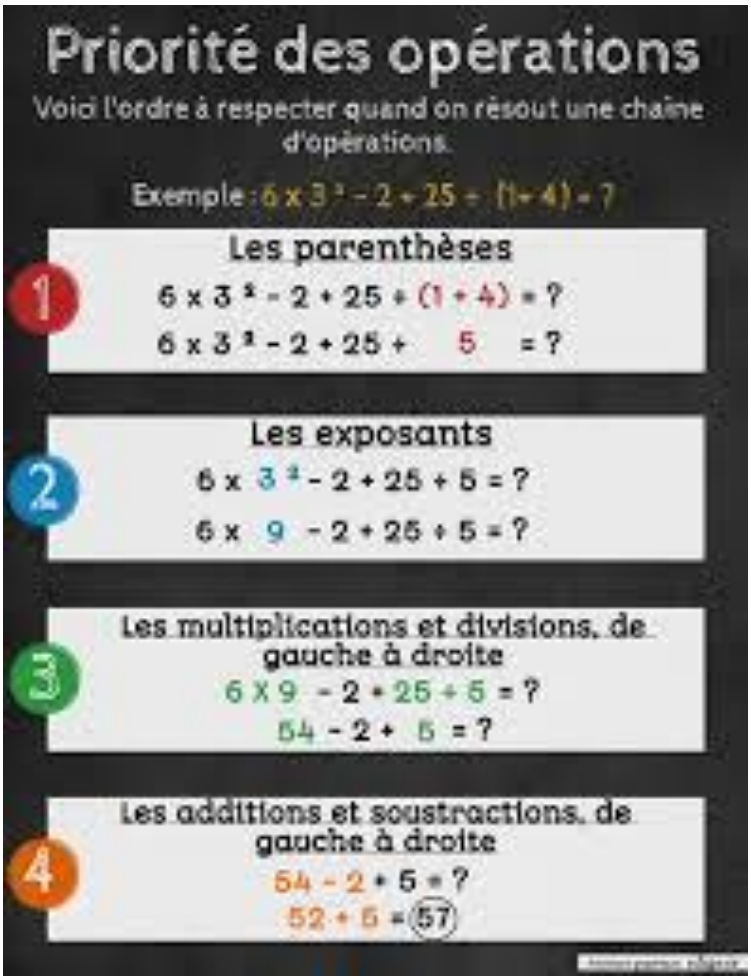
2) Les priorités opératoires

Les règles de priorités dans les calculs sont une chose indispensable à connaître par cœur, faute de quoi le résultat risque bien d'être faux.

On effectue les calculs dans cet ordre :

1. **Les calculs entre parenthèse**
2. **Les puissances**
3. **Les multiplications et les divisions**
4. **Les additions et les soustractions**

Lorsqu'il y a égalité des priorités, on effectue les calculs de la gauche vers la droite.



Exemples :

A= 13 + 5 x (3 – 11) – 7

A= 13 + 5 x (-8) -7

A= 13 – 40 – 7

A= -27 – 7

A= -34

B=7 – 3 x 4^2- 44÷(-4)

B=7 – 3x16 - 44÷(-4)

B=7 – 48 – (- 11)

B= – 41 + 11

B= -30

3) Les règles de calcul des nombres relatifs

Le plus gros piège dans les règles de calculs des relatifs serait de confondre les règles qui s'appliquent aux multiplications et divisions avec les règles qui s'appliquent aux additions et soustractions. Commençons par le plus simple :

3.1. MULTIPLICATION ET DIVISION DES NOMBRES DECIMAUX

Règles des signes (à connaître par ♥)

- Le produit de deux nombres relatifs de **même signe** est positif.
- Le produit de deux nombres relatifs de **signes contraires** est négatif.

Cette règle s'applique à l'identique pour les quotients

Exemples :

Nombres de même signe

$6 \times 5 = 30$

$(-6) \times (-4) = 24$

Le produit est positif.

Nombre de signes contraires.

$8{,}5 \times (-2) = -17$

$2{,}3 \times (-4) = -9{,}2$

Le produit est négatif.

$\frac{-72}{-8} = 9$

$\frac{-350}{5} = -70$

Le quotient est négatif.

$\frac{40}{-8} = -5$

$\frac{-42}{-1000} = 0{,}042$

Le quotient est positif.

Règles de calcul

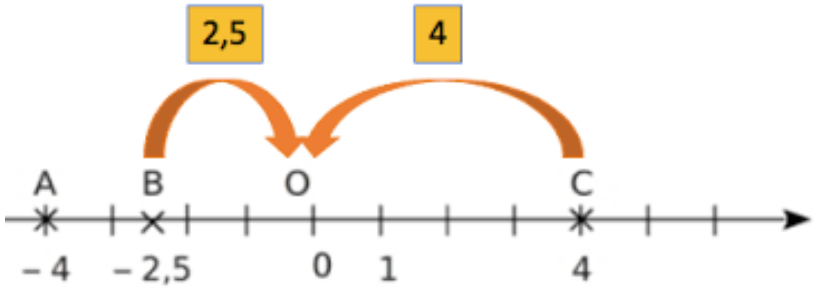
Pour calculer le produit de deux nombres relatifs :

- On détermine son signe avec la règle des signes
- On multiplie les valeurs absolues des deux nombres.

Pour calculer le quotient de deux nombres relatifs :

- On détermine son signe avec la règle des signes
- On divise les valeurs absolues des deux nombres.

La valeur absolue d'un nombre est sa valeur sans le signe (positif ou négatif). On l'appelle aussi distance à zéro.



On peut changer l'ordre des termes dans un produit : 9 x 6,2 = 6,2 x 9

On ne peut pas changer l'ordre des termes dans un quotient : 9 : 6,2 ≠ 6,2 : 9

On ne peut pas diviser par zéro !!

Signe d'un produit de plusieurs facteurs

Propriété : Un produit de nombres relatifs non nuls est :

- Positif si le nombre de facteurs négatifs est pair
- Négatif si le nombre de facteurs négatifs est impair .

Cette règle s'applique à l'identique pour les quotients

Exemples :

- Le produit (-9)x(-2)x(-4)x(-25)x3 est positif car il contient un nombre pair (ici 4) de facteurs négatifs.
  (-9)x(-2)x(-4)x(-25)x3=54 x 100=5400

- Le produit (-2)x(-5)x4x(-3) est négatif car il contient un nombre impair (ici 3) de facteurs négatifs.
  (-2)x(-5)x4x(-3)= -10 x 12 = -120

- Le quotient $\frac{\frac{15}{-2}}{\frac{-8}{-5}}$ aura un résultat négatif car le nombre de termes négatifs est impair

- Le quotient $\frac{5 \times (-6)}{3 \, x \, 4}$ aura un résultat négatif car le nombre de termes négatifs est impair

3.2. MULTIPLICATION ET DIVISION DES NOMBRES EN ECRITURE FRACTIONNAIRE

Définitions indispensables :

1. **Numérateur :** dans une fraction c'est le nombre entier au dessus du trait de fraction (nombre qui est divisé)
2. **Dénominateur :** dans une fraction c'est le nombre entier en dessous du trait de fraction (nombre qui divise)
3. **Une fraction dont le dénominateur et le numérateur sont égaux est égale à 1 :** $\frac{a}{a} = a : a = 1$

3.2.1. Règles de multiplication

Règle 1 : Pour multiplier deux quotients, on multiplie les numérateurs et on multiplie les dénominateurs.

Exemple : $\frac{-3}{5} \times \frac{8}{11} = \frac{-3 \times 8}{5 \times 11} = \frac{-24}{55}$

Règle 1 bis : Multiplier un quotient par un nombre entier c'est multiplier le numérateur du quotient par ce nombre.

Exemple : $3 \times \frac{5}{12} = \frac{3}{1} \times \frac{5}{12} = \frac{3 \times 5}{1 \times 12} = \frac{15}{12}$

Règle 1 ter : Prendre une fraction d'un nombre (ou d'une quantité) c'est multiplier cette fraction par ce nombre (ou cette quantité).

Exemple :

Nous sommes 3 à nous partager une bouteille de vin de 75 centilitres

Pour être équitable nous prendrons chacun $\frac{1}{3} \times 75 = \frac{1 \times 75}{3} = \frac{75}{3} = 25$ centilitres de vin (soit presque 2 verres de 13 cl chacun)

3.2.2. L'inverse d'un nombre

Inverse : lorsque deux nombres non nuls a et b ont pour produit 1, ils sont l'inverse l'un de l'autre.

(0 x b = 0 donc aucun produit dont l'un des termes est nul ne peut être 1)

Démonstration :

$$\boldsymbol{a \times b = 1\ donc\ \frac{a \times b}{a} = \frac{1}{a}\ donc\ \frac{a}{a} \times b = \frac{1}{a}\ donc\ 1 \times b = \frac{1}{a}}$$

Propriétés :

Propriété 1 : L'inverse d'un nombre relatif x non nul est le nombre $\frac{1}{x}$.

Exemples :

1) $7 \times \frac{1}{7} = 1$ donc l'inverse de 7 est $\frac{1}{7}$

2) $-3 \times \frac{1}{-3} = 1$ donc l'inverse de -3 est $\frac{1}{-3}$ c'est-à-dire $-\frac{1}{3}$

Propriété 2 : L'inverse de $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$ avec a et b nombres non nuls –

3.2.3. Règles de division

Propriété : Diviser par un nombre relatif différent de 0 revient à multiplier par son inverse.

Exemples : $\frac{7}{3} \div \frac{5}{6} = \frac{7}{3} \times \frac{6}{5} = \frac{7 \times 6}{3 \times 5} = \frac{42}{15}$

$\frac{1}{3} \div 5 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1 \times 1}{3 \times 5} = \frac{1}{15}$

3.3. ADDITION ET SOUSTRACTION DES NOMBRES DECIMAUX

Règle 1: Pour additionner deux nombres relatifs de même signe :

- On conserve ce signe.
- On additionne les valeurs absolues (distance à zéro)

Exemples : **(+4,6) + (+ 3,5) = 8,1** **- 13 – 67 = - 80**
(-5) + (-2,4) = -7,4 **- 205 – 304 = -509**

Règle 2 : Pour additionner deux nombres relatifs de signes contraires :

- On prend le signe de celui qui a la plus grande valeur absolue ;
- On soustrait la plus petite valeur absolue à la plus grande.

Exemples **(+3) + (-7) = -4** **15 – 60 = - 45**
(-21) + (+30.5) = 9,5 **- 320 + 280 = - 40**

Opposé d'un nombre : L'opposé d'un nombre a est le nombre qui a la même valeur absolue et le signe opposé.

Exemples : 4 et -4 ; $-\frac{5}{12}$ et $\frac{5}{12}$; π et -π

Les soustractions de nombres relatifs étant source d'erreur, il est beaucoup plus fiable de remplacer les soustraction par des additions du nombre opposé

Exemple **3 – 7 = 3 + (-7)**

= - 4

Règle 3 :

Soustraire un nombre revient à additionner son opposé

Exemples

(-3) - (+7) = ...

(-20) – (-19) =.....

(-50) – (+58,7)=.....

210 – (-130)=.....

Méthode : Calculer une somme algébrique

Pour calculer une somme algébrique :

1. écrit les soustractions sous forme d 'additions,
2. si possible : on repère les nombres opposés qui s'annulent, ou les calculs qui vont être rapides
3. on regroupe les termes de même signe
4. on effectue les additions.

Exemple $C = -13 + (-28) - (-30) + 18 - (+40)$

$C = 13 + (-28) + (+30) + 18 + (-40)$ étape 1

$C = 13 + 30 + 18 + (-28) + (-40)$ étape 3

$C = 61 + (-68)$ étape 4

$C = -7$

Calculer $A = 7{,}3 - 3 + 12 - 14 - 7{,}3$

.....

.....

.....

.....

Calculer $B = -2{,}5 + 3{,}8 + 4{,}2 - 2{,}7$

.....

.....

.....

.....

3.4. ADDITION ET SOUSTRACTION DES NOMBRES EN ECRITURE FRACTIONNAIRE

Règle 1 : On ne peut additionner ni soustraire des fractions de dénominateurs différents.

Règle 2 : On met les fractions au même dénominateur avant de les additionner ou de les soustraire

Méthode : Mettre 2 fractions sous le même dénominateur

- La méthode infaillible : on multiplie numérateur et dénominateur de la chaque fraction par le dénominateur de l'autre

$$\frac{a}{b}+\frac{x}{y}=\frac{ay}{by}+\frac{bx}{by}$$

- Parfois les dénominateurs ont un facteur commun et le calcul est plus facile

Exemples : $\frac{1}{3}+\frac{5}{6}=\frac{1\times2}{3\times2}+\frac{5}{6}=\frac{2}{6}+\frac{5}{6}$

$\frac{1}{3}-\frac{5}{6}=\frac{1\times2}{3\times2}-\frac{5}{6}=\frac{2}{6}-\frac{5}{6}$

Règle 3 : On peut additionner ou soustraire des fractions de même dénominateurs on additionne les numérateurs ou on soustrait les numérateurs

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{by} \qquad \frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{by}$$

Exemples : $\frac{1}{3}+\frac{5}{3}=\frac{1+5}{3}=\frac{6}{3}$ $\frac{15}{3}-\frac{5}{3}=\frac{15-5}{3}=\frac{10}{3}$

$$\frac{a}{b}+\frac{x}{y}=\frac{ay}{by}+\frac{bx}{by}=\frac{ay+bx}{by}$$

Exemples : $\frac{1}{3}+\frac{5}{6}=\frac{1\times2}{3\times2}+\frac{5}{6}=\frac{2}{6}+\frac{5}{6}=\frac{7}{6}$

$\frac{1}{3}-\frac{5}{6}=\frac{1\times2}{3\times2}-\frac{5}{6}=\frac{2}{6}-\frac{5}{6}=-\frac{3}{6}$

4) Les critères de divisibilité et simplification de fractions

Quand on calcule avec des nombres rationnels, il faut savoir simplifier les fractions, cela facilite le travail et les résultats sont plus fiables.

$$\frac{135}{40} = \frac{27 \times 5}{8 \times 5} = \frac{27}{8}$$

Pour simplifier une fraction il faut trouver les diviseurs communs du dénominateur et du numérateur.

Pour ce faire, on utilise les nombres premiers : il s'agit des nombres qui ne sont divisibles que par 1 et par eux-mêmes.

La liste des premiers nombres premiers doit être apprise :

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31……

Ainsi que les critères de divisibilité :

- **On sait qu'un nombre est divisible par 2 s'il est pair**
- **Si l'on additionne chaque chiffre d'un nombre et que la somme est un multiple de 3, alors le nombre est divisible par 3 :**
  ex : 186 1+8+6=15 15 est dans la table de 3 donc 186 est divisible par 3
- **On sait qu'un nombre est divisible par 5 si le chiffre des unités est 0 ou 5**

Chaque nombre non-premier peut être décomposé en produit de facteurs premiers.

Méthodologie pour décomposer un nombre en facteurs premiers :

On vérifie la divisibilité des nombres premiers en ordre croissant.

Par exemple : 1116 est pair donc divisible par 2, le résultat de cette division est 558, également pair, je continue donc de diviser par 2, le résultat est 279. 279 n'est pas divisible par 2 mais est divisible par 3.

1 116	2
558	2
279	3
93	3
31	31
1	1

186	2
93	3
31	31
1	1

Nous avons ainsi montré que 1116=2x2x3x3x31 et que 286=2x3x31

Si l'on doit simplifier la fraction $\frac{1116}{186}$, on peut ainsi procéder :

$$\frac{1116}{186} = \frac{\cancel{2} \text{ x } 2 \text{ x } 3 \text{ x } \cancel{3 \text{ x } 31}}{\cancel{2 \text{ x } 3 \text{ x } 31}} = \frac{2 \text{ x } 3}{1} = 6$$